

ANÁLISE COMBINATÓRIA

MÓDULO 6 | ANÁLISE COMBINATÓRIA



ANÁLISE COMBINATÓRIA

CONTAGEM

Os problemas de contagem são frequentes no nosso cotidiano. Estão presentes, por exemplo, quando pensamos nas possibilidades de combinação de roupas, de planejamento de pratos em cardápios ou de combinações de números em um jogo de loteria.

A **análise combinatória** é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de modo eficiente, do número de elementos de um conjunto. Associada à probabilidade e à estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

FATORIAL (!)

Muitos problemas de análise combinatória devem ser resolvidos com uma multiplicação de números naturais consecutivos, como $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Nesses exemplos, multiplicamos os números naturais de 1 até n , sendo no primeiro caso $n = 3$ e, no segundo, $n = 5$. Em geral, produtos do tipo $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1) \cdot n$ são escritos com a notação de fatorial (!).

Dado um número natural n ($n > 1$), define-se **n fatorial** ou **fatorial de n** (indicado por $n!$) como sendo o produto dos n números naturais consecutivos, escritos desde n até 1.

EXEMPLO

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

CONVENÇÃO

O fatorial de 1 é igual ao próprio 1 $\rightarrow 1! = 1$

O fatorial de zero é igual a 1 $\rightarrow 0! = 1$

ATENÇÃO!

Só existe fatorial de números inteiros positivos!

$$(-5)! = \text{NÃO EXISTE} \quad -(-5)! = -1(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = -120$$

O cálculo de $n!$ fica complicado a medida que o número n aumenta. Por isso, podemos interromper (truncar) a qualquer momento, desde que colocado o símbolo ! depois do número.

EXEMPLO

$$\frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!}} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1) \cdot n$$

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Uma pessoa quer viajar de Porto Alegre a Recife, passando por São Paulo. Sabendo que há 3 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Porto Alegre e 4 roteiros diferentes para chegar a Recife partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?



$$3 \cdot 4 = 12$$

1ª ETAPA 2ª ETAPA ROTAS DIFERENTES

Se um evento é composto por duas (ou mais) etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é m e o número de possibilidades na segunda etapa é n , então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos, diferindo apenas pela ordem dos elementos. Para determinar o número de permutações em um grupo com n elementos, basta calcular o fatorial desse n .

$$P_n = n!$$

EXEMPLO

Gui, Bussunda e JowJow vão posar para uma fotografia. De quantas maneiras essa fotografia pode ser tirada:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

ANAGRAMAS

São palavras obtidas a partir de outra, quando se trocam as posições de suas letras, não importando se essas palavras tenham sentido ou não.

EXEMPLO

Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

A M O R = 4 letras não repetidas

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ anagramas}$$

PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Para os cálculos de permutação de n elementos, dos quais k são repetidos, utilizaremos a seguinte fórmula, onde n é o número total de elementos a ser permutados e n_1, n_2, \dots, n_k os elementos repetidos.

$$P_n^{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

ARRANJO SIMPLES

São agrupamentos em que **se considera a ordem dos elementos**, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento. Por exemplo, ao formar números naturais de 3 algarismos distintos escolhido entre os algarismos 2, 4, 6, 7 e 8, estaremos arranjando esses 5 algarismos 3 a 3. Por exemplo, o número 246 é diferente de 642. Note que os algarismos são os mesmos, mas diferem pela ordem.

Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados de p a p , ($n \geq p$) a qualquer sequência ordenada de p elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

OS ELEMENTOS DOS ARRANJOS DIFEREM PELA ORDEM!

Geralmente usamos arranjo nos problemas envolvendo senhas, formação de números, grupos de pessoas com cargos, placas, números de telefone.

PERMUTAÇÃO é um caso particular do arranjo, assim, qualquer problema que envolva permutações ou arranjo simples pode ser resolvido diretamente pelo princípio multiplicativo.

COMBINAÇÃO SIMPLES

São agrupamentos em que **não se considera a ordem dos elementos**, isto é, mudanças na ordem dos elementos não alteram o agrupamento. Por exemplo, ao formar conjuntos de números naturais de 3 algarismos distintos, escolhido entre os algarismos 2, 4, 6, 7 e 8, estaremos combinando esses 5 algarismos 3 a 3. Por exemplo, o conjunto $\{2, 4, 6\}$ é igual ao conjunto $\{6, 4, 2\}$. Note que a ordem dos algarismos mudou, mas o conjunto é o mesmo, ou seja, os elementos **não** diferem pela ordem.

Dado um conjunto A com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos de A, tomados p a p, $(n \text{ } p)$, qualquer subconjunto de A formado por p elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

OS ELEMENTOS DAS COMBINAÇÕES NÃO DIFEREM PELA ORDEM!

Geralmente usamos combinação nos problemas envolvendo conjuntos, figuras planas, grupos de pessoas sem cargos, loterias.

ATENÇÃO!

Não confunda quando usar a permutação, o arranjo ou a combinação. Como exemplo, vamos considerar o conjunto das vogais {A, E, I, O, U}.

- 1 De quantas maneiras podemos alinhar as 5 vogais?

AEIOU ou **AIEUO** ou **OAIEU**

Repare que estamos trabalhando com todos os elementos do grupo, ou seja, formando outras configurações a partir da troca de posição dos elementos. Nesse caso usamos a **PERMUTAÇÃO**.

- 2 Quantos subconjuntos de 3 vogais distintas podemos formar?

{A, E, I} ou **{A, I, E}** ou **{I, E, A}**

Repare que estamos escolhendo apenas uma parte do grupo de vogais para formar subconjuntos com 3 vogais distintas e, quando permutados dentro do agrupamento, **NÃO** forma uma nova configuração, ou seja, os agrupamentos **NÃO DIFEREM** pela ordem dos elementos no grupo. Nesse caso, usamos a **COMBINAÇÃO**.

- 3 Quantos anagramas de 3 vogais distintas podemos formar?

AEI ou **AIE** ou **IEA**

Repare que estamos escolhendo apenas uma parte do grupo de vogais para formar anagramas com 3 vogais distintas e, quando permutadas dentro do agrupamento, **FORMA** uma nova configuração, ou seja, os agrupamentos **DIFEREM** pela ordem dos elementos no grupo. Nesse caso, usamos o **ARRANJO**.

EXERCÍCIOS

MÓDULO 6 | ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. (UCPEL) Alterando-se as posições das letras da palavra JANEIRO, o número de permutações obtidas, nas quais as vogais aparecem sempre juntas é:

- a) 5040
- b) 576
- c) 288
- d) 144
- e) 24

2. (UNESP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é

- a) 2
- b) 4
- c) 8
- d) 16
- e) 24

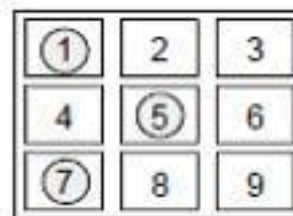
3. (FURG/2008) Manoela decidiu escolher uma senha para seu e-mail trocando de lugar as letras do seu nome. O número de maneiras como ela pode fazer isso, considerando que a senha escolhida deve ser diferente do próprio nome, é

- a) 817.
- b) 48.
- c) 5039.
- d) 23.
- e) 2519.

4. (UFG/2010) Num episódio de uma série policial de televisão, um agente secreto encontra-se diante do desafio de descobrir a senha de quatro dígitos digitada no teclado numérico, instalado na porta de entrada de um laboratório. Para isso, o agente utiliza o seguinte artifício: borrifa um spray sobre o teclado, fazendo com que os algarismos recém-digítados para abrir a porta fiquem destacados, como mostra a figura. Para sua surpresa, apenas três dígitos são ressaltados pelo spray, indicando que um dos dígitos aparece duas vezes na senha.

Com base nestas informações, a quantidade de sequências de quatro dígitos que podem ser encontradas utilizando o artifício do agente secreto é a seguinte:

- a) 36
- b) 24
- c) 16
- d) 13
- e) 4



5. (UFSM/2014) Para cuidar da saúde, muitas pessoas buscam atendimento em cidades maiores onde ha centros médicos especializados e hospitais mais equipados. Muitas vezes, o transporte ate essas cidades e feito por vans disponibilizadas pelas prefeituras.

Em uma van com 10 assentos, viajarão 9 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 9 passageiros podem ocupar suas poltronas na van?

- a) 4.032.
- b) 36.288.
- c) 40.320.
- d) 362.880.
- e) 403.200.



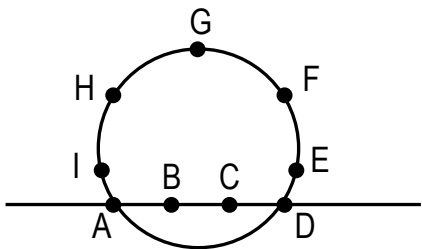
6. (PUC-RS/2010) Uma melodia é uma sequência de notas musicais. Para compor um trecho de três notas musicais sem repeti-las, um músico pode utilizar as sete notas que existem na escala musical. O número de melodias diferentes possíveis de serem escritas é:

- a) 3
- b) 21
- c) 35
- d) 210
- e) 5040

7. (PUC-RS/2011) Numa estante da Biblioteca, encontram-se cinco livros de Física Quântica de autores diferentes, seis livros de Física Médica de autores diferentes e quatro livros de Física Nuclear, também de autores diferentes. Um grupo de alunos, para realizar uma pesquisa, precisa consultar dois livros de Física Quântica, três livros de Física Médica e um livro de Física Nuclear. O número de escolhas possíveis para essa consulta é

- a) 8400
- b) 800
- c) 204
- d) 144
- e) 34

8. Na figura abaixo indicamos 9 pontos, entre os quais não há 3 colineares, exceto os 4 que marcamos numa mesma reta. Quantos triângulos existem com vértices nestes pontos?



- a) 84
- b) 80
- c) 70
- d) 60
- e) 4

9. (UPF/2010) O número de anagramas da sigla UPFTV que inicia ou termina por vogal é:

- a) 120
- b) 48
- c) 8
- d) 24
- e) 72

10. (PEIES/2010) Na fase inicial dos jogos da Copa do Mundo 2010, na África do Sul, os 32 países participantes foram divididos em 8 grupos, e cada seleção jogou uma vez com todas as seleções de seu grupo. O número total de jogos, nessa fase, foi de

- a) 24
- b) 32
- c) 48
- d) 56
- e) 64

11. (MACK) Uma classe tem 10 alunos e 5 alunas. Formam-se comissões de 4 alunos e 2 alunas. O número de comissões em que participa o aluno X e não participa a aluna Y é:

- a) 1260
- b) 2100
- c) 840
- d) 504
- e) 336

12. (UERJ/2011) Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos. Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:

- a) 80
- b) 96
- c) 120
- d) 126

13. (UENP/2011) Fatorial de um número natural n (notação $n!$) é o produto dos números naturais de 1 a n , ou seja, $n! = 1.2.3. \dots (n - 1).n$. O resultado da expressão $E = 3. 6. 9. 12. \dots . 24$ é equivalente a:

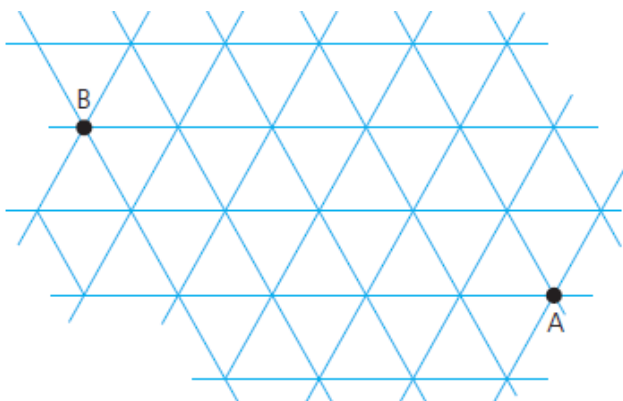
- a) $3.8!$
- b) $3!.8!$
- c) 38.8
- d) $38.8!$
- e) $8^3.3!$

14. (UNIFRA/2010) Dado o avanço da tecnologia e o aumento crescente da necessidade de códigos de segurança, muitas empresas usam sistemas de códigos para identificação de seus colaboradores, no acesso aos computadores.

Considerando que, num sistema de senhas de uma empresa, as senhas são indicadas por duas vogais seguidas de dois dígitos, o número máximo de senhas que pode ser produzido nesse sistema é

- a) 1500
- b) 2025
- c) 2450
- d) 2500
- e) 6500

15. (UERJ/2011) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo:



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d . Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

- a) 20
- b) 15
- c) 12
- d) 10

16. (UFSM/2008) O setor de nutrição de determinada cantina sugere, para uma refeição rica em carboidratos, 4 tipos de macarrão, 3 tipos de molho e 5 tipos de queijo. O total de opções para quem vai servir um tipo de macarrão, um tipo de molho e três tipos de queijo é

- a) $2.5!$
- b) $5!$
- c) $(5!)2$
- d) $5!/2$
- e) $2/5!$

17. Quantos números de 4 algarismos contêm pelo menos um algarismo 8?

- a) 3168
- b) 5832
- c) 9000
- d) 3024
- e) 6480

18. (FURG/2006) Uma pizzaria permite que seus clientes escolham pizzas com 1, 2 ou 3 sabores diferentes dentre os 7 sabores que constam no cardápio. O número de pizzas diferentes oferecidas por essa pizzaria, considerando somente os tipos e número de sabores possíveis, é igual a

- a) 210.
- b) 269.
- c) 63.
- d) 70.
- e) 98.

19. (UNIFRA/2008) Num grupo constituído de 12 pessoas, das quais 5 são americanas, 4 são brasileiras e 3 são canadenses, deseja-se formar uma fila de forma que as pessoas do mesmo país fiquem sempre juntas. Nessa situação, o número de maneiras distintas de se organizar tal fila é igual a

- a) $11!$
- b) $3!(5!4!3!)$
- c) $5!4!3!$
- d) $11!/5!4!3!$
- e) $2!(5!4!3!)$



20. (UPF/2005) O número de anagramas da palavra MELHOR, que começam e terminam por vogal, é definido por

- a) P_6 b) P_5 c) $4!$ d) $2 \cdot P_6$ e) $2 \cdot P_4$

21. (UFSM) Para ter acesso a uma sala reservada, cada usuário recebe um cartão de identificação com 4 listras coloridas, de modo que qualquer cartão deve diferir de todos os outros pela natureza das cores ou pela ordem das mesmas nas listras. Operando com 5 cores distintas e observando que listras vizinhas não tenham a mesma cor, quantos usuários podem ser identificados?

- a) 10 b) 20 c) 120 d) 320 e) 625

22. (UNIFRA/2016) Uma pessoa para ter acesso à internet, necessita de uma senha, mas, na hora de digitá-la, esquece o número. Ela lembra que o número tem 4 algarismos, começa com 9, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 3 em alguma posição. O número máximo de tentativas, para acertar a senha, é

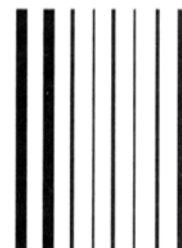
- a) 28. b) 56. c) 84. d) 112. e) 168.

23. (UNIFRA/2014) Um Posto de Atendimento Médico atende em plantões de emergência, com equipes de 2 médicos, 2 enfermeiros, 4 técnicos de enfermagem e 2 funcionários para limpeza e atendimento. Sabendo que o referido posto dispõe de 4 médicos, 5 enfermeiros, 6 técnicos de enfermagem e 4 funcionários, o número de maneiras distintas com que é possível formar a equipe de atendimento é

- a) 37.
b) 1.800.
c) 5.200.
d) 5.400.
e) 6.912.

24. As embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma sequência formada por barras verticais: quatro de largura 1,5 mm; três de largura 0,5 mm e duas de largura 0,25 mm como na figura abaixo. Cada sequência indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

- a) 1260
b) 1150
c) 930
d) 815
e) 536



25. (UCPEL/2012) Com dois goleiros que só jogam nessa posição e sete jogadores que não jogam no gol, quantos times de futebol de salão podem ser formados, sabendo-se que um time de futebol de salão é composto por cinco jogadores e um desses é o goleiro?

- a) 80 b) 70 c) 120 d) 60 e) 90

26. (UFSM) Num acidente rodoviário, após ouvir várias testemunhas, concluiu-se que o motorista culpado pelo acidente dirigia um carro cuja placa era constituída de 2 vogais distintas e quatro algarismos diferentes, sendo que o algarismo das unidades era o 5. Isso não facilitou o trabalho da polícia, pois o número de placas suspeitas é de

- a) 10800
b) 10080
c) 8100
d) 1080
e) 524

27. (UNIFRA/2005) Um salão tem 6 portas. O número de maneiras distintas para que esse salão possa estar aberto é

- a) 720. b) 120. c) 64. d) 63. e) 1.



28. (ULBRA/2014) Ana, Beatriz, Carlos, Denise, Luiza e Otávio estão dispostos a representar seus colegas em uma convenção sindical. Nessa convenção, cada empresa pode enviar uma comissão com três representantes. O número de comissões distintas que podem ser formadas nessa empresa é

a) 6 b) 9 c) 18 d) 20 e) 24

29. (UNESP/2014) Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo. Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será

- a) 302 400.
- b) 113 400.
- c) 226 800.
- d) 181 440.
- e) 604 800.

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

30. (PEIES/2009) Uma pequena fábrica produz 4 tipos diferentes de massas e 6 tipos diferentes de molhos. Uma possibilidade de venda que agrada aos consumidores é colocá-los numa cesta que contenha 2 embalagens de massa e 3 embalagens de molho. Quantas cestas diferentes podem ser montadas, de forma que contenham exatamente 2 embalagens de massa não necessariamente diferentes e 3 tipos diferentes de molhos?

- a) 1.820.
- b) 320.
- c) 240.
- d) 200.
- e) 120.

31. (UFSC/2014) Entre as últimas tendências da moda, pintar as unhas ganha um novo estilo chamado de “filha única”. A arte consiste em pintar a unha do dedo anelar de uma cor diferente das demais, fazendo a mesma coisa nas duas mãos, conforme mostra o exemplo na figura. Larissa tem três cores diferentes de esmalte, então, usando essa forma de pintar as unhas, poderá fazê-lo de 6 maneiras diferentes. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?



32. (UNISC/2016) Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria. O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é

- a) 24
- b) 36
- c) 56
- d) 72
- e) 144

33. (UFSC/2014) No prédio onde Gina mora, instalaram um sistema eletrônico de acesso no qual se deve criar uma senha com 4 algarismos, que devem ser escolhidos dentre os algarismos apresentados no teclado da figura. Para não esquecer a senha, ela resolveu escolher 4 algarismos dentre os 6 que representam a data de seu nascimento. Dessa forma, se Gina nasceu em 27/10/93, então ela pode formar 15 senhas diferentes com 4 algarismos distintos. Essa afirmação é verdadeira ou falsa?



34. (UNIFRA/2014) Um Posto de Atendimento Médico atende em plantões de emergência, com equipes de 2 médicos, 2 enfermeiros, 4 técnicos de enfermagem e 2 funcionários para limpeza e atendimento. Sabendo que o referido posto dispõe de 4 médicos, 5 enfermeiros, 6 técnicos de enfermagem e 4 funcionários, o número de maneiras distintas com que é possível formar a equipe de atendimento é

- a) 37.
- b) 1.800.
- c) 5.200.
- d) 5.400.
- e) 6.912.

35. (UDESC/2016) A Câmara de Vereadores de uma cidade é composta por 13 vereadores, sendo que 6 destes são de partidos políticos da situação (aliados ao governo municipal) e os 7 restantes são de partidos da oposição (contrários ao governo municipal). É necessário compor uma comissão especial a ser formada por exatamente 5 vereadores, de forma que haja pelo menos dois representantes de cada um destes blocos políticos. Além disso, foi definido que o líder da situação e o líder da oposição não poderão fazer parte da mesma comissão. Sob essas condições, a quantidade de comissões distintas que pode ser constituída é igual a:

- a) 945
- b) 500
- c) 620
- d) 810
- e) 310

36. (UFSC/2016) Em relação às proposições abaixo, é CORRETO afirmar que:

() Em reunião de deputados de determinado estado, decidiu-se que deveria ser constituída uma comissão para tratar de assuntos de infraestrutura. Essa comissão deveria ter 2 membros do partido A, 2 membros do partido B e 1 membro do partido C. Se, para essas vagas, o partido A dispõe de 5 candidatos, o partido B de 6 candidatos e o partido C de apenas 2 candidatos, então a comissão de infraestrutura poderá ser formada de, exatamente, 60 maneiras distintas.

() Com o avanço da medicina, estudiosos acreditam que, em breve, os pais poderão escolher os fenótipos dos seus filhos. Considere a situação de serem possíveis as escolhas: • sexo: homem ou mulher; • cor dos olhos: azul, verde, castanho ou preto; • cor do cabelo: loiro, ruivo, castanho ou preto. Então, para um casal que deseje ter uma criança de sexo masculino que não tenha olhos azuis, haverá 24 possibilidades distintas para o biótipo de seu filho.

() Entre diferentes jogos de loteria, está a LOTO FÁCIL. O jogo consiste em um sorteio de 15 números, sem repetição, de um total de 25 números disponíveis. É permitido apostar de 15 a 18 dezenas, sendo que uma aposta simples consiste na marcação de 15 dezenas. Assim, uma pessoa que fez 816 apostas simples distintas terá a mesma chance de ganhar que uma pessoa que marcou 18 dezenas em um único cartão.

GABARITO: 1B; 2C; 3E; 4A; 5D; 6E; 7B; 8B; 9D; 10C; 11D; 12C; 13D; 14D; 15B; 16B; 17A; 18C; 19B; 20D; 21D; 22E; 23D; 24A; 25B; 26B; 27D; 28B; 29D; 30D; 31V; 32E; 33F; 34D; 35D; 36FFV.